OSVRTI

Osnove kaosa i mogućnosti njegove primjene

*M. Šimac**
PLIVA Hrvatska d. o. o.
Prilaz baruna Filipovića 25
10 000 Zagreb

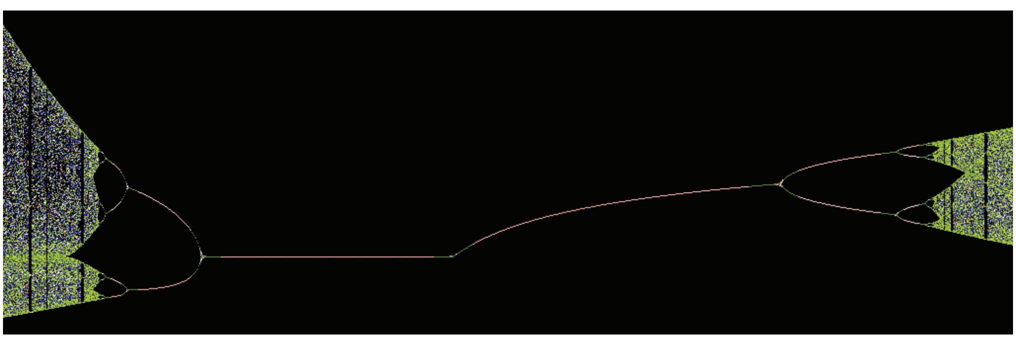
Teorija kaosa veliko je matematičko-fizikalno područje složenih jednadžbi kojima se opisuje neko zbivanje u prirodi. Kada bi sustavi u prirodi bili linearni, tj. da bi zbivanje mogli pokazati kao sumu njegovih sastavnica (pravci su linearni izrazi), prostora za kaos ne bi bilo. Međutim priroda je složenija od toga i gotovo u pravilu pokazuje nelinearnost. Nelinearni članovi (pr. sin(x), x^2 i dr.) jedan su od uvjeta da bi sustav mogao postati kaotičan. To je još početkom 20. stoljeća predvidio Poincaré. Kada tome dodamo još i ekstremnu osjetljivost na početne uvjete, moguće je da i najjednostavniji sustavi pokažu nepredvidljiva svojstva.

Krenuvši od početnih uvjeta, izračun u kaosu se nastavlja postupkom iteracije. To znači rezultati koje dobijemo uvrštavanjem početnih vrijednosti u izraz jesu ulazni podaci za novi krug proračuna tog istog izraza (pr. $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ itd.). Kada vrijednosti koje dobivamo računom teže nekoj vrijednosti (broju, točki, liniji...), kažemo da smo dobili atraktor periode. Atraktor može biti točka, linija, ploha... Ponekad te vrijednosti teže dvjema ili više različitih vrijednosti, pa govorimo o atraktorima viših perioda. Međutim može se dogoditi da ataktor nema nikakvu periodičnost, da se izračuni ne približavaju nekoj određenoj vrijednosti, već su naizgled nasumice razbacani u prostoru. Tada govorimo o kaotičnom atraktoru.

Jednadžbe koje prolaze kroz povećanje broja atraktora, ovisno o početnim uvjetima, jednadžbe su koje idu u kaos. Povećanje broja atraktora naziva se bifurkacija. Postoje različite vrste bifurkacija, a jedan od najpoznatijih primjera je bifurkacija s udvostručenjem periode na primjeru populacijske jednadžbe, koju je još 1845. postavio belgijski matematičar Verhulst kako bi opisao kako se iz godine u godinu mijenja populacija određene vrste na nekom mjestu.

Razvojem teorije kaosa počelo je preispitivanje fizikalnih modela. Postavilo se pitanje koliko su sustavi kaotični i postoji li stabilan sustav. Istraživanjem kaosa i njegovih učinaka otkrilo se da sustavi mogu prelaziti iz kaotičnih u regularne i obrnuto. Pri tome kaotično ponašanje mogu pokazati i neki sasvim neočekivani sustavi. Jedan od njih je i njihalo! Normalno postavljeno njihalo će pomakom iz ravnotežnog položaja harmonički titrati i biti lijep primjer determinističkog sustava. U njemu je sila koja ga vraća u ravnotežni položaj razmjerna kutu otklona ($F = -mg\alpha$). Međutim to vrijedi za otklone ne veće od 5–6 stupnjeva. Ako uzmemo da je njihalo kruto, otklon može biti i do 180 stupnjeva. Tada povratna sila o kutu ovisi po relaciji $F = -mg\sin\alpha$. Tada gibanje više nije linearno. U tom slučaju, udarimo li njihalo dovoljno jako, gibat će se amplitudom pola kruga, a već malo jači udarac izazvat će vrtnju oko točke u kojoj je njihalo učvršćeno.

Gibanje polukružnom amplitudom nije trajno, jer se javlja trenje kao posljedica otpora sredstva i time usporava njihalo. Rješenje toga je pravilno udaranje kuglice silom dovoljnom da ona nastavi svoje jednoliko gibanje. Međutim udarce nije uvijek moguće potpuno jednako izvesti. U tom slučaju sasvim mala razlika u jačini tog udarca može imati posljedicu da će se, ako je udarac preslab, njihanje nastaviti, a ako je prejak njihanje priječi nepredvidljivu vrtnju. Ta će se dva oblika gibanja izmjenjivati i očekivano regularni sustav postaje kaotičan!



Slika 1 – Bifurkacija s udvostručenjem perioda, primjer za populacijsku jednadžbu belgijskog matematičara Pierre François Verhulst (1804. – 1849.) (izvor: http://en.wikipedia.org)

* Mag. prim. kem. Marko Šimac
e-pošta: marko.simac@pliva.com

Osvrti, Kem. Ind. **64** (7-8) (2015) 433–437

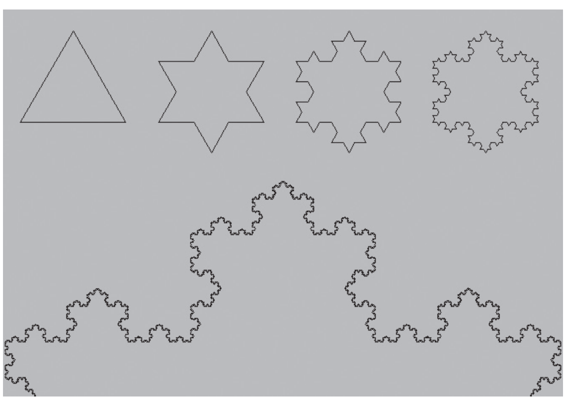
Takvih je primjera kaotičnog gibanja u polju sile teže mnogo. Spomenimo samo klinasti biljar, opružno njihalo, gravitacijski Fermijev oscilator... Svi oni pokazuju određene udjele regularnog i kaotičnog ponašanja, zavisno od početnih uvjeta te osobina i parametara sustava. Općenito gledajući, biljari su odličan primjer za dobivanje kaotičnog gibanja.

Istraživanja posljednjeg desetljeća 20. stoljeća pokazala su da se unutar područja kaosa kriju mali prozori pravilnosti, koji se malim, pažljivim doziranjem vanjskog djelovanja mogu dovoljno stabilizirati da bi sustav "uskočio" u njih i nastavio se ponašati kao regularan sustav. Time je dokazano da se unutar kaosa kriju i određene pravilnosti. Jedan od razloga te pravilnosti je i svojstvo fraktalnosti.

Fraktali – ljepota geometrije kaosa

Unatoč tome što se teorija kaosa razvila tek krajem 20. stoljeća, fraktali su ljudima poznati od pamtivjeka, samo što ih kao takve nisu prepoznavali. Dokumentirani prikaz fraktala nalazimo već 1525. u "Priručniku za slikanje" Albrechta Dürera, gdje opisuje uzorke nastale primjenom pentagona. To uvelike podsjeća na kasniji primjer fraktala Sierpinskija.

Slika 2 – Fraktali Sierpinskija na primjeru trokuta dimenzije 1,585. Zadivljujuća je kompleksnost oblika postignuta nakon svega četiri iteracije (izvor: fractalfoundation.org)

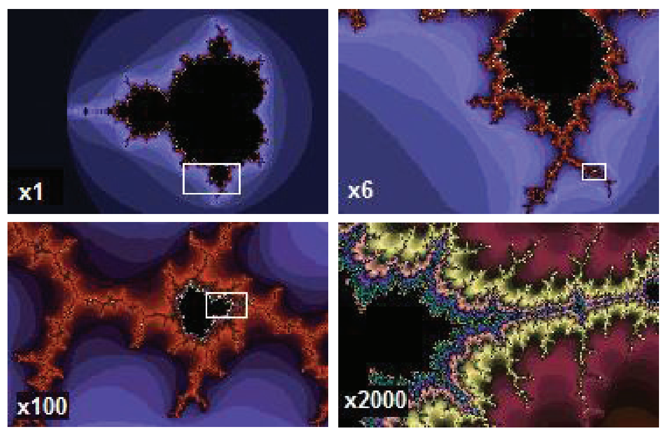


Slika 3 – "Kochova pahuljica" – jednostavan fraktal dimenzije 1.26 (izvor: users.tkk.fi)

Slika 3 – Cantorova površina – fraktal između točke i linije dimenzije 0.63093 (izvor: www.epsilones.com)

U 17. stoljeću Leibniz je definirao ponavljanje samosličnosti, međutim uzeo je u obzir da samo linija može biti sebi slična. Od tada sve do 19. stoljeća nije se pojavila slična definicija. Tek je 1872. Karl Weierstrass dao primjer funkcije kojom je definirao samosličnost. Međutim definicija je bila odveć apstraktna, pa je Helge von Koch 1904. godine dao geometrijsku interpretaciju slične funkcije, koja je danas poznata kao "Kochova pahuljica". Nedugo kasnije, 1915. je Waclaw Sierpinski kreirao svoj uzorak fraktala pomoću trokuta. Iz tog razdoblja dolaze nam još cijeli nizovi skupova fraktalnog prikaza poput onih Henria Poincaréa, Felixa Kleina, Pierrea Fatoua, Gastona Julie i Georga Cantora. Svi su oni krajem 19. i početkom 20. stoljeća proučavali te fascinantne tvorevine dobivene iteracijom, ali bez računala nisu mogli uočiti sav njihov značaj i ljepotu. Većina ih je smatrala krivuljama, a ne dimenzionalnim objektima.

Takvo poimanje tih zanimljivih sebi sličnih matematičkih objekata zadržalo se sve do kraja 20. stoljeća. Tada se za samosličnost počeo zanimati Benoit Mandelbrot. Nakon niza istraživanja i mjerenja dužine Britanske obale, temeljenih na ranijem radu Lewisa Fry Richardsona, Mandelbrot je napokon 1975. skovao riječ fraktal i definirao njezino značenje. Svoje otkriće potkrijepio je atraktivnim računalnim prikazima, koji su i danas najčešća predodžba fraktala.



Slika 5 – "Mandelbratovi skupovi" – najpoznatiji fraktalni skup koji je kreirao otkrivač fraktala Benoit Mandelbrot 1975.

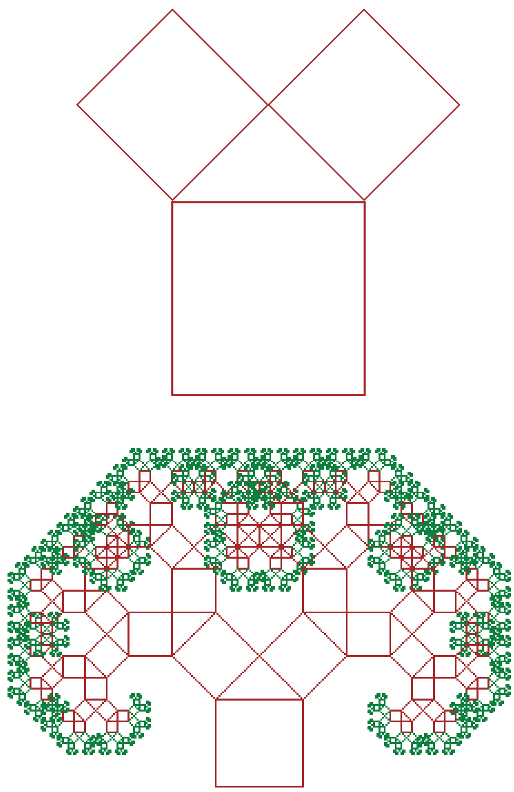
Na temelju toga fraktal možemo definirati kao geometrijski oblik koji se može podijeliti na beskonačno mnogo dijelova koji su na različitim skalama veličine sami sebi jednaki. Prije spomenuti prozori pravilnosti unutar kaosa posljedica su upravo fraktalne građe dijagrama jednadžbi (pogledajte pažljivije grafički prikaz bifurkacije populacijske jednadžbe i uočit ćete fraktalnu građu, uzorak koji se ponavlja od osnovnog prema manjemu). Također je zanimljivo da fraktali imaju necjelobrojnu dimenziju, pa na primjeru Kochove krivulje mogu ispasti nešto između linije i plohe (Kochova krivulja ima dimenziju 1.26).

Iako iza fraktala često stoje složene jednadžbe, neke lijepe uzorke možete uz malo truda i sami dobiti. Primjer toga je "Pitagorino selo" te Wadini fraktalni bazeni.

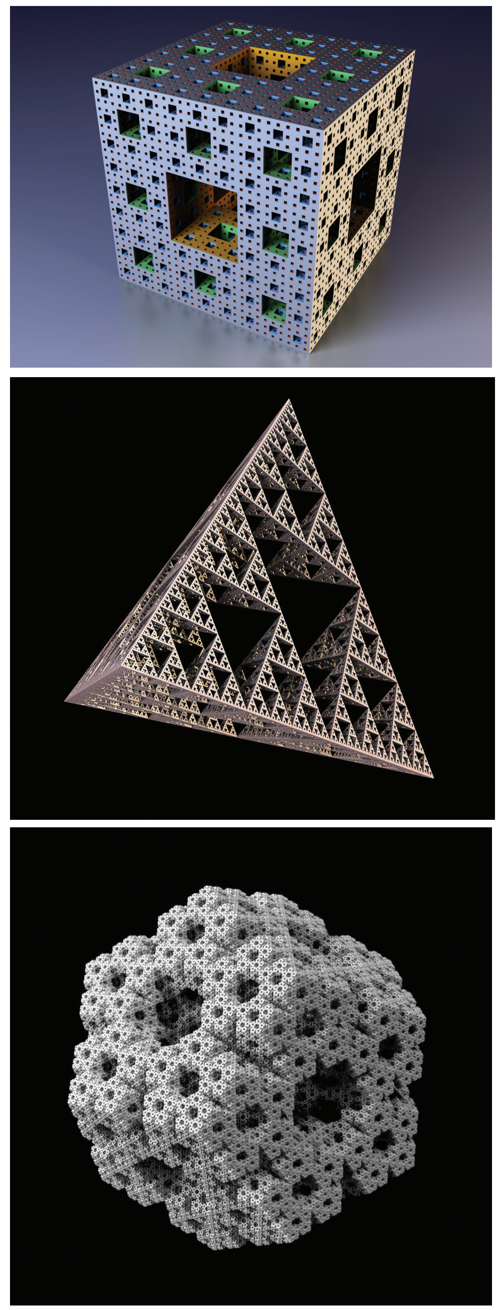
Vratimo li se s jednostavnih fraktala na fraktale Sierpinskija, ali u višim dimenzijama, možemo dobiti vrlo zanimljive objekte. Na sljedećim slikama su primjeri trokuta, kvadrata i dodekadroona fraktaliziranih po načelu Sierpinskog, ali u višim dimenzijama.

Prednost tih i sličnih trodimenzionalnih fraktalnih tvorevina vrlo je velika površina, koja je teoretski beskrajna, dok u praksi ovisi o broju provedenih iteracija i preciznosti rada. Takve velike kompleksne površine mogle bi se pokazati kao dobri nosači katalizatora ili adsorbensa. Dimenzioniranjem otvora mogla bi se

Slika 6 – Primjer istočkastog fraktala u obliku papratovog lista (izvor: www.home.aone.net.au)



Slika 7 – "Pitagorino selo" – jednostavni primjer nastanka fraktala koji možete i sami doma napraviti



Slika 8 – Izvori: commons.wikimedia.org, http://en.wikipedia.org, www.reddit.com

precizirati dostupnost tvari putem njezine veličine ili precizirati svojstva filtracije. Slično se već primjenjuje u industriji na prirodnim materijalima poznatima kao zeoliti. Industrijski napravljeni materijali sličnih svojstava kao zeoliti mogli bi preciznije definirati željeni raspon svojstava putem uniformiranja veličine čestica i otvora kontrolom broja iteracija prilikom proizvodnje.

Iz navedenih primjera moguće je vidjeti kako, mnogima apstraktna, teorija kaosa može naći praktičnu primjenu u stvarnom životu. Svoju primjenu teorija kaosa pronašla je u vremenskoj prognozi, tržišnoj analizi, proučavanju kretanja i ponašanja populacija i masa, medicini, strojarstvu i mnogim drugim granama znanosti i tehnologije. Pri tome se često upotrebljavaju izrazi vezani uz dinamiku složenih nelinearnu sustava radije nego pojam teorije kaosa, iako je u načelu riječ o istome. Proučavanjem fraktala otkrili smo da su oni temeljni prirodni način ustroja živog (stabla, listovi, organi...) i neživog (oblaci, planine, rijeke, munje...) svijeta te da su mnoge naizgled različite stvari iz našeg okruženja na razini fraktala nevjerojatno slične. Razumijevanje podloge teorije omogućava prepoznavanje potencijalno kaotičnih sustava te ograničenja naizgled determinističkih sustava na skup parametara koji omogućava uvijek predvidljivo ponašanje. Teorija također može pomoći u razumijevanju ekstremne osjetljivosti te nepredvidljivog ponašanja sustava u slučaju vrlo malih promjena ulaznih parametara. Primjenjujući ta znanja, vještim preskakanjem iz kaotičnih u nekaotične faze sustava moguće je vraćati kontrolu u slučaju bijega sustava u fazu kaosa (kao što smo to vidjeli na primjeru srčanog ritma). Te iste faze pravilnosti unutar kaosa također nam omogućuju tvorbu fascinantnih trodimenzionalnih oblika koji bi jednog dana mogli pronaći primjenu u kemijskoj industriji kao nosači raznih tvari ili kao filtrabilna sredstva.